

1、归一问题

【含义】在解题时，先求出一份是多少（即单一量），然后以单一量为标准，求出所要求的数量。这类应用题叫做归一问题。

【数量关系】总量 \div 份数=1份数量

1份数量 \times 所占份数=所求几份的数量

另一总量 \div （总量 \div 份数）=所求份数

【解题思路和方法】先求出单一量，以单一量为标准，求出所要求的数量。

例 1 买 5 支铅笔要 0.6 元钱，买同样的铅笔 16 支，需要多少钱？

解：（1）买 1 支铅笔多少钱？ $0.6 \div 5 = 0.12$ （元）

（2）买 16 支铅笔需要多少钱？ $0.12 \times 16 = 1.92$ （元）

列成综合算式 $0.6 \div 5 \times 16 = 0.12 \times 16 = 1.92$ （元）

答：需要 1.92 元。

例 2 3 台拖拉机 3 天耕地 90 公顷，照这样计算，5 台拖拉机 6 天耕地多少公顷？

解：（1）1 台拖拉机 1 天耕地多少公顷？ $90 \div 3 \div 3 = 10$ （公顷）

（2）5 台拖拉机 6 天耕地多少公顷？ $10 \times 5 \times 6 = 300$ （公顷）

列成综合算式 $90 \div 3 \div 3 \times 5 \times 6 = 10 \times 30 = 300$ （公顷）

答：5 台拖拉机 6 天耕地 300 公顷。

例 3 5 辆汽车 4 次可以运送 100 吨钢材，如果用同样的 7 辆汽车运送 105 吨钢材，需要运几次？

解：（1）1 辆汽车 1 次能运多少吨钢材？ $100 \div 5 \div 4 = 5$ （吨）

（2）7 辆汽车 1 次能运多少吨钢材？ $5 \times 7 = 35$ （吨）

（3）105 吨钢材 7 辆汽车需要运几次？ $105 \div 35 = 3$ （次）

列成综合算式 $105 \div (100 \div 5 \div 4 \times 7) = 3$ （次）

答：需要运 3 次。

2、归总问题

【含义】解题时，常常先找出“总数量”，然后再根据其它条件算出所求的问题，叫归总问题。所谓“总数量”是指货物的总价、几小时（几天）的总工作量、几公亩地上的总产量、几小时行的总路程等。

【数量关系】1份数量 \times 份数=总量

总量 \div 1份数量=份数

总量 \div 另一份数=另一每份数量

【解题思路和方法】先求出总数量，再根据题意得出所求的数量。

例 1 服装厂原来做一套衣服用布 3.2 米，改进裁剪方法后，每套衣服用布 2.8 米。原来做 791 套衣服的布，现在可以做多少套？

解：（1）这批布总共有多少米？ $3.2 \times 791 = 2531.2$ （米）

（2）现在可以做多少套？ $2531.2 \div 2.8 = 904$ （套）

列成综合算式 $3.2 \times 791 \div 2.8 = 904$ （套）

答：现在可以做 904 套。

例 2 小华每天读 24 页书，12 天读完了《红岩》一书。小明每天读 36 页书，几天可以读完《红岩》？

解：（1）《红岩》这本书总共多少页？ $24 \times 12 = 288$ （页）

（2）小明几天可以读完《红岩》？ $288 \div 36 = 8$ （天）

列成综合算式 $24 \times 12 \div 36 = 8$ （天）

答：小明 8 天可以读完《红岩》。

例 3 食堂运来一批蔬菜，原计划每天吃 50 千克，30 天慢慢消费完这批蔬菜。后来根据大家的意见，每天比原计划多吃 10 千克，这批蔬菜可以吃多少天？

解：（1）这批蔬菜共有多少千克？ $50 \times 30 = 1500$ （千克）

（2）这批蔬菜可以吃多少天？ $1500 \div (50 + 10) = 25$ （天）

列成综合算式 $50 \times 30 \div (50 + 10) = 1500 \div 60 = 25$ （天）

答：这批蔬菜可以吃 25 天。

3、和差问题

4、【含义】已知两个数量的和与差，求这两个数量各是多少，这类应用题叫和差问题。

【数量关系】大数 = (和 + 差) \div 2

小数 = (和 - 差) \div 2

【解题思路和方法】简单的题目可以直接套用公式；复杂的题目变通后再用公式。

例 1 甲乙两班共有学生 98 人，甲班比乙班多 6 人，求两班各有多少人？

解：甲班人数 = $(98 + 6) \div 2 = 52$ （人）

乙班人数 = $(98 - 6) \div 2 = 46$ （人）

答：甲班有 52 人，乙班有 46 人。

例 2 长方形的长和宽之和为 18 厘米，长比宽多 2 厘米，求长方形的面积。

解：长 = $(18 + 2) \div 2 = 10$ （厘米）

宽 = $(18 - 2) \div 2 = 8$ （厘米）

长方形的面积 = $10 \times 8 = 80$ （平方厘米）

答：长方形的面积为 80 平方厘米。

例 3 有甲乙丙三袋化肥，甲乙两袋共重 32 千克，乙丙两袋共重 30 千克，甲丙两袋共重 22 千克，求三袋化肥各重多少千克。

解：甲乙两袋、乙丙两袋都含有乙，从中可以看出甲比丙多（ $32 - 30$ ）=2 千克，且甲是大数，丙是小数。由此可知

$$\text{甲袋化肥重量} = (22 + 2) \div 2 = 12 \text{ (千克)}$$

$$\text{丙袋化肥重量} = (22 - 2) \div 2 = 10 \text{ (千克)}$$

$$\text{乙袋化肥重量} = 32 - 12 = 20 \text{ (千克)}$$

答：甲袋化肥重 12 千克，乙袋化肥重 20 千克，丙袋化肥重 10 千克。

例 4 甲乙两车原来共装苹果 97 筐，从甲车取下 14 筐放到乙车上，结果甲车比乙车还多 3 筐，两车原来各装苹果多少筐？

解：“从甲车取下 14 筐放到乙车上，结果甲车比乙车还多 3 筐”，这说明甲车是大数，乙车是小数，甲与乙的差是（ $14 \times 2 + 3$ ），甲与乙的和是 97，因此

$$\text{甲车筐数} = (97 + 14 \times 2 + 3) \div 2 = 64 \text{ (筐)}$$

$$\text{乙车筐数} = 97 - 64 = 33 \text{ (筐)}$$

答：甲车原来装苹果 64 筐，乙车原来装苹果 33 筐。

4、和倍问题

【含义】已知两个数的和及大数是小数的几倍（或小数是大数的几分之几），要求这两个数各是多少，这类应用题叫做和倍问题。

【数量关系】总和 \div （几倍 + 1）= 较小的数

总和 - 较小的数 = 较大的数

较小的数 \times 几倍 = 较大的数

【解题思路和方法】简单的题目直接利用公式，复杂的题目变通后利用公式。

例 1 果园里有杏树和桃树共 248 棵，桃树的棵数是杏树的 3 倍，求杏树、桃树各多少棵？

$$\text{解：(1) 杏树有多少棵？} 248 \div (3 + 1) = 62 \text{ (棵)}$$

$$\text{(2) 桃树有多少棵？} 62 \times 3 = 186 \text{ (棵)}$$

答：杏树有 62 棵，桃树有 186 棵。

例 2 东西两个仓库共存粮 480 吨，东库存粮数是西库存粮数的 1.4 倍，求两库各存粮多少吨？

$$\text{解：(1) 西库存粮数} = 480 \div (1.4 + 1) = 200 \text{ (吨)}$$

$$\text{(2) 东库存粮数} = 480 - 200 = 280 \text{ (吨)}$$

答：东库存粮 280 吨，西库存粮 200 吨。

例 3 甲站原有车 52 辆，乙站原有车 32 辆，若每天从甲站开往乙站 28 辆，从乙站开往甲站 24 辆，几天后乙站车辆数是甲站的 2 倍？

解：每天从甲站开往乙站 28 辆，从乙站开往甲站 24 辆，相当于每天从甲站开往乙站（ $28 - 24$ ）辆。把几天以后甲站的车辆数当

作 1 倍量，这时乙站的车辆数就是 2 倍量，两站的车辆总数（52+32）就相当于（2+1）倍，

那么，几天以后甲站的车辆数减少为

$$(52+32) \div (2+1) = 28 \text{ (辆)}$$

所求天数为 $(52-28) \div (28-24) = 6$ （天）

答：6 天以后乙站车辆数是甲站的 2 倍。

例 4 甲乙丙三数之和是 170，乙比甲的 2 倍少 4，丙比甲的 3 倍多 6，求三数各是多少？

解：乙丙两数都与甲数有直接关系，因此把甲数作为 1 倍量。

因为乙比甲的 2 倍少 4，所以给乙加上 4，乙数就变成甲数的 2 倍；

又因为丙比甲的 3 倍多 6，所以丙数减去 6 就变为甲数的 3 倍；

这时 $(170+4-6)$ 就相当于 $(1+2+3)$ 倍。那么，

$$\text{甲数} = (170+4-6) \div (1+2+3) = 28$$

$$\text{乙数} = 28 \times 2 - 4 = 52$$

$$\text{丙数} = 28 \times 3 + 6 = 90$$

答：甲数是 28，乙数是 52，丙数是 90。

5、差倍问题

【含义】已知两个数的差及大数是小数的几倍（或小数是大数的几分之几），要求这两个数各是多少，这类应用题叫做差倍问题。

【数量关系】两个数的差 \div （几倍-1）=较小的数
较小的数 \times 几倍 = 较大的数

【解题思路和方法】简单的题目直接利用公式，复杂的题目变通后利用公式。

例 1 果园里桃树的棵数是杏树的 3 倍，而且桃树比杏树多 124 棵。求杏树、桃树各多少棵？

解：（1）杏树有多少棵？ $124 \div (3-1) = 62$ （棵）

（2）桃树有多少棵？ $62 \times 3 = 186$ （棵）

答：果园里杏树是 62 棵，桃树是 186 棵。

例 2 爸爸比儿子大 27 岁，今年，爸爸的年龄是儿子年龄的 4 倍，求父子二人今年各是多少岁？

解：（1）儿子年龄 = $27 \div (4-1) = 9$ （岁）

（2）爸爸年龄 = $9 \times 4 = 36$ （岁）

答：父子二人今年的年龄分别是 36 岁和 9 岁。

例 3 商场改革经营管理办法后，本月盈利比上月盈利的 2 倍还多 12 万元，又知本月盈利比上月盈利多 30 万元，求这两个月盈利各是多少万元？

解：如果把上月盈利作为 1 倍量，则 $(30-12)$ 万元就相当于上月盈利的 $(2-1)$ 倍，因此

上月盈利 = $(30 - 12) \div (2 - 1) = 18$ (万元)

本月盈利 = $18 + 30 = 48$ (万元)

答：上月盈利是 18 万元，本月盈利是 48 万元。

例 4 粮库有 94 吨小麦和 138 吨玉米，如果每天运出小麦和玉米各是 9 吨，问几天后剩下的玉米是小麦的 3 倍？

解：由于每天运出的小麦和玉米的数量相等，所以剩下的数量差等于原来的数量差 $(138 - 94)$ 。把几天后剩下的小麦看作 1 倍量，则几天后剩下的玉米就是 3 倍量，那么， $(138 - 94)$ 就相当于 $(3 - 1)$ 倍，因此

剩下的小麦数量 = $(138 - 94) \div (3 - 1) = 22$ (吨)

运出的小麦数量 = $94 - 22 = 72$ (吨)

运粮的天数 = $72 \div 9 = 8$ (天)

答：8 天以后剩下的玉米是小麦的 3 倍。

6、倍比问题

【含义】有两个已知的同类量，其中一个量是另一个量的若干倍，解题时先求出这个倍数，再用倍比的方法算出要求的数，这类应用题叫做倍比问题。

【数量关系】总量 \div 一个数量 = 倍数

另一个数量 \times 倍数 = 另一总量

【解题思路和方法】先求出倍数，再用倍比关系求出要求的数。

例 1 100 千克油菜籽可以榨油 40 千克，现在有油菜籽 3700 千克，可以榨油多少？

解：(1) 3700 千克是 100 千克的多少倍？ $3700 \div 100 = 37$ (倍)

(2) 可以榨油多少千克？ $40 \times 37 = 1480$ (千克)

列成综合算式 $40 \times (3700 \div 100) = 1480$ (千克)

答：可以榨油 1480 千克。

例 2 今年植树节这天，某小学 300 名师生共植树 400 棵，照这样计算，全县 48000 名师生共植树多少棵？

解：(1) 48000 名是 300 名的多少倍？ $48000 \div 300 = 160$ (倍)

(2) 共植树多少棵？ $400 \times 160 = 64000$ (棵)

列成综合算式 $400 \times (48000 \div 300) = 64000$ (棵)

答：全县 48000 名师生共植树 64000 棵。

例 3 凤翔县今年苹果大丰收，田家庄一户人家 4 亩果园收入 11111 元，照这样计算，全乡 800 亩果园共收入多少元？全县 16000 亩果园共收入多少元？

解：(1) 800 亩是 4 亩的几倍？ $800 \div 4 = 200$ (倍)

(2) 800 亩收入多少元？ $11111 \times 200 = 2222200$ (元)

(3) 16000 亩是 800 亩的几倍？ $16000 \div 800 = 20$ (倍)

(4) 16000 亩收入多少元？ $2222200 \times 20 = 44444000$ (元)

答：全乡 800 亩果园共收入 2222200 元，全县 16000 亩果园共收入 44444000 元。

7、相遇问题

【含义】两个运动的物体同时由两地出发相向而行，在途中相遇。这类应用题叫做相遇问题。

【数量关系】相遇时间 = 总路程 ÷ (甲速 + 乙速)

总路程 = (甲速 + 乙速) × 相遇时间

【解题思路和方法】简单的题目可直接利用公式，复杂的题目变通后再利用公式。

例 1 南京到上海的水路长 392 千米，同时从两港各开出一艘轮船相对而行，从南京开出的船每小时行 28 千米，从上海开出的船每小时行 21 千米，经过几小时两船相遇？

解：392 ÷ (28 + 21) = 8 (小时)

答：经过 8 小时两船相遇。

例 2 小李和小刘在周长为 400 米的环形跑道上跑步，小李每秒钟跑 5 米，小刘每秒钟跑 3 米，他们从同一地点同时出发，反向而跑，那么，二人从出发到第二次相遇需多长时间？

解：“第二次相遇”可以理解为二人跑了两圈。

因此总路程为 400 × 2

相遇时间 = (400 × 2) ÷ (5 + 3) = 100 (秒)

答：二人从出发到第二次相遇需 100 秒时间。

例 3 甲乙二人同时从两地骑自行车相向而行，甲每小时行 15 千米，乙每小时行 13 千米，两人在距中点 3 千米处相遇，求两地的距离。

解：“两人在距中点 3 千米处相遇”是正确理解本题题意的关键。从题中可知甲骑得快，乙骑得慢，甲过了中点 3 千米，乙距中点 3 千米，就是说甲比乙多走的路程是 (3 × 2) 千米，因此，

相遇时间 = (3 × 2) ÷ (15 - 13) = 3 (小时)

两地距离 = (15 + 13) × 3 = 84 (千米)

答：两地距离是 84 千米。

8、追及问题

【含义】两个运动物体在不同地点同时出发（或者在同一地点而不是同时出发，或者在不同地点又不是同时出发）作同向运动，在后面的，行进速度要快些，在前面的，行进速度较慢些，在一定时间之内，后面的追上前面的物体。这类应用题就叫做追及问题。

【数量关系】追及时间 = 追及路程 ÷ (快速 - 慢速)

追及路程 = (快速 - 慢速) × 追及时间

【解题思路和方法】简单的题目直接利用公式，复杂的题目变通后利用公式。

例 1 好马每天走 120 千米，劣马每天走 75 千米，劣马先走 12 天，好马几天能追上劣马？

解：（1）劣马先走 12 天能走多少千米？ $75 \times 12 = 900$ （千米）

（2）好马几天追上劣马？ $900 \div (120 - 75) = 20$ （天）

列成综合算式 $75 \times 12 \div (120 - 75) = 900 \div 45 = 20$ （天）

答：好马 20 天能追上劣马。

例 2 小明和小亮在 200 米环形跑道上跑步，小明跑一圈用 40 秒，他们从同一地点同时出发，同向而跑。小明第一次追上小亮时跑了 500 米，求小亮的速度是每秒多少米。

解：小明第一次追上小亮时比小亮多跑一圈，即 200 米，此时小亮跑了 $(500 - 200)$ 米，要知小亮的速度，须知追及时间，即小明跑 500 米所用的时间。又知小明跑 200 米用 40 秒，则跑 500 米用 $[40 \times (500 \div 200)]$ 秒，所以小亮的速度是

$(500 - 200) \div [40 \times (500 \div 200)] = 300 \div 100 = 3$ （米）

答：小亮的速度是每秒 3 米。

例 3 我人民解放军追击一股逃窜的敌人，敌人在下午 16 点开始从甲地以每小时 10 千米的速度逃跑，解放军在晚上 22 点接到命令，以每小时 30 千米的速度开始从乙地追击。已知甲乙两地相距 60 千米，问解放军几个小时可以追上敌人？

解：敌人逃跑时间与解放军追击时间的时差是 $(22 - 16)$ 小时，这段时间敌人逃跑的路程是 $[10 \times (22 - 16)]$ 千米，甲乙两地相距 60 千米。由此推知

追及时间 = $[10 \times (22 - 16) + 60] \div (30 - 10) = 120 \div 20 = 6$ （小时）

答：解放军在 6 小时后可以追上敌人。

例 4 一辆客车从甲站开往乙站，每小时行 48 千米；一辆货车同时从乙站开往甲站，每小时行 40 千米，两车在距两站中点 16 千米处相遇，求甲乙两站的距离。

解：这道题可以由相遇问题转化为追及问题来解决。从题中可知客车落后于货车 (16×2) 千米，客车追上货车的时间就是前面所说的相遇时间，

这个时间为 $16 \times 2 \div (48 - 40) = 4$ （小时）

所以两站间的距离为 $(48 + 40) \times 4 = 352$ （千米）

列成综合算式 $(48 + 40) \times [16 \times 2 \div (48 - 40)] = 88 \times 4 = 352$ （千米）

答：甲乙两站的距离是 352 千米。

例 5 兄妹二人同时由家上学，哥哥每分钟走 90 米，妹妹每分钟走 60 米。哥哥到校门口时发现忘记带课本，立即沿原路回家去取，行至离校 180 米处和妹妹相遇。问他们家离学校有多远？

解：要求距离，速度已知，所以关键是求出相遇时间。从题中可知，在相同时间（从出发到相遇）内哥哥比妹妹多走（ 180×2 ）米，这是因为哥哥比妹妹每分钟多走（ $90 - 60$ ）米，

那么，二人从家出走到相遇所用时间为

$$180 \times 2 \div (90 - 60) = 12 \text{ (分钟)}$$

家离学校的距离为 $90 \times 12 - 180 = 900$ （米）

答：家离学校有 900 米远。

例 6 孙亮打算上课前 5 分钟到学校，他以每小时 4 千米的速度从家步行去学校，当他走了 1 千米时，发现手表慢了 10 分钟，因此立即跑步前进，到学校恰好准时上课。后来算了一下，如果孙亮从家一开始就跑步，可比原来步行早 9 分钟到学校。求孙亮跑步的速度。

解：手表慢了 10 分钟，就等于晚出发 10 分钟，如果按原速走下去，就要迟到（ $10 - 5$ ）分钟，后段路程跑步恰准时到学校，说明后段路程跑比走少用了（ $10 - 5$ ）分钟。如果从家一开始就跑步，可比步行少 9 分钟，由此可知，行 1 千米，跑步比步行少用 [$9 - (10 - 5)$] 分钟。

所以步行 1 千米所用时间为 $1 \div [9 - (10 - 5)] = 0.25$ （小时） = 15（分钟）

跑步 1 千米所用时间为 $15 - [9 - (10 - 5)] = 11$ （分钟）

跑步速度为每小时 $1 \div 11 / 60 = 5.5$ （千米）

答：孙亮跑步速度为每小时 5.5 千米。

9、植树问题

【含义】按相等的距离植树，在距离、棵距、棵数这三个量之间，已知其中的两个量，要求第三个量，这类应用题叫做植树问题。

【数量关系】线形植树棵数 = 距离 \div 棵距 + 1

圆形植树棵树 = 圆形周长 \div 棵距

闭合环形植树棵数 = 距离 \div 棵距
方形植树棵数 = 方形周长 \div 棵距

三角形棵树 = 三角形周长 \div 棵距

面积植树棵数 = 面积 \div （棵距 \times 行距）

【解题思路和方法】先弄清楚植树问题的类型，然后可以利用公式。

例 1 一条河堤 136 米，每隔 2 米栽一棵垂柳，头尾都栽，一共要栽多少棵垂柳？

解： $136 \div 2 + 1 = 68 + 1 = 69$ （棵）

答：一共要栽 69 棵垂柳。

例 2 一个圆形池塘周长为 400 米，在岸边每隔 4 米栽一棵白杨树，一共能栽多少棵白杨树？

解： $400 \div 4 = 100$ （棵）

答：一共能栽 100 棵白杨树。

例 3 一个正方形的运动场，每边长 220 米，每隔 8 米安装一个照明灯，一共可以安装多少个照明灯？

解： $220 \times 4 \div 8 = 106$ （个）

答：一共可以安装 106 个照明灯。

例 4 给一个面积为 96 平方米的住宅铺设地板砖，所用地地板砖的长和宽分别是 60 厘米和 40 厘米，问至少需要多少块地板砖？

解： $96 \div (0.6 \times 0.4) = 96 \div 0.24 = 400$ （块）

答：至少需要 400 块地板砖。

例 5 一座大桥长 500 米，给桥两边的电杆上安装路灯，若每隔 50 米有一个电杆，每个电杆上安装 2 盏路灯，一共可以安装多少盏路灯？

解：（1）桥的一边有多少个电杆？ $500 \div 50 + 1 = 11$ （个）

（2）桥的两边有多少个电杆？ $11 \times 2 = 22$ （个）

（3）大桥两边可安装多少盏路灯？ $22 \times 2 = 44$ （盏）

答：大桥两边一共可以安装 44 盏路灯。

10、年龄问题

【含义】这类问题是根据题目的内容而得名，它的主要特点是两人的年龄差不变，但是，两人年龄之间的倍数关系随着年龄的增长在发生变化。

【数量关系】年龄问题往往与和差、和倍、差倍问题有着密切联系，尤其与差倍问题的解题思路是一致的，要紧紧抓住“年龄差不变”这个特点。

【解题思路和方法】可以利用“差倍问题”的解题思路和方法。
两个数的差 \div （几倍 - 1）= 较小的数

例 1 爸爸今年 35 岁，亮亮今年 5 岁，今年爸爸的年龄是亮亮的几倍？明年呢？

解： $35 \div 5 = 7$ （倍）

$(35 + 1) \div (5 + 1) = 6$ （倍）

答：今年爸爸的年龄是亮亮的 7 倍，
明年爸爸的年龄是亮亮的 6 倍。

例 2 母亲今年 37 岁，女儿今年 7 岁，几年后母亲的年龄是女儿的 4 倍？

解：（1）母亲比女儿的年龄大多少岁？ $37 - 7 = 30$ （岁）

（2）几年后母亲的年龄是女儿的 4 倍？ $30 \div (4 - 1) - 7 = 3$ （年）

列成综合算式 $(37 - 7) \div (4 - 1) - 7 = 3$ （年）

答：3年后母亲的年龄是女儿的4倍。

例3 3年前父子的年龄和是49岁，今年父亲的年龄是儿子年龄的4倍，父子今年各多少岁？

解：今年父子的年龄和应该比3年前增加 (3×2) 岁，

今年二人的年龄和为 $49 + 3 \times 2 = 55$ （岁）

把今年儿子年龄作为1倍量，则今年父子年龄和相当于 $(4+1)$ 倍，因此，今年儿子年龄为 $55 \div (4+1) = 11$ （岁）

今年父亲年龄为 $11 \times 4 = 44$ （岁）

答：今年父亲年龄是44岁，儿子年龄是11岁。

例4 甲对乙说：“当我的岁数曾经是你现在的岁数时，你才4岁”。乙对甲说：“当我的岁数将来是你现在的岁数时，你将61岁”。求甲乙现在的岁数各是多少？（可用方程解）

解：这里涉及到三个年份：过去某一年、今年、将来某一年。

列表分析：

过去某一年	今年	将来某一年	
甲	□岁	△岁	61岁
乙	4岁	□岁	△岁

表中两个“□”表示同一个数，两个“△”表示同一个数。

因为两个人的年龄差总相等： $\square - 4 = \triangle - \square = 61 - \triangle$ ，也就是4，□，△，61成等差数列，所以，61应该比4大3个年龄差，

因此二人年龄差为 $(61 - 4) \div 3 = 19$ （岁）

甲今年的岁数为 $\triangle = 61 - 19 = 42$ （岁）

乙今年的岁数为 $\square = 42 - 19 = 23$ （岁）

答：甲今年的岁数是42岁，乙今年的岁数是23岁。

11、行船问题

【含义】行船问题也就是与航行有关的问题。解答这类问题要弄清船速与水速，船速是船只本身航行的速度，也就是船只在静水中航行的速度；水速是水流的速度，船只顺水航行的速度是船速与水速之和；船只逆水航行的速度是船速与水速之差。

【数量关系】 $(\text{顺水速度} + \text{逆水速度}) \div 2 = \text{船速}$

$(\text{顺水速度} - \text{逆水速度}) \div 2 = \text{水速}$

顺水速 = 船速 + 水速 = 逆水速 + 水速 $\times 2$

逆水速 = 船速 - 水速 = 顺水速 - 水速 $\times 2$

【解题思路和方法】大多数情况可以直接利用数量关系的公式。

例1 一只船顺水行320千米需用8小时，水流速度为每小时15千米，这只船逆水行这段路程需用几小时？

解：由条件知，顺水速 = 船速 + 水速 = $320 \div 8$ ，而水速为每小时15千米，

所以，船速为每小时 $320 \div 8 - 15 = 25$ （千米）

船的逆水速为 $25 - 15 = 10$ （千米）

船逆水行这段路程的时间为 $320 \div 10 = 32$ (小时)

答：这只船逆水行这段路程需用 32 小时。

例 2 甲船逆水行 360 千米需 18 小时，返回原地需 10 小时；

乙船逆水行同样一段距离需 15 小时，返回原地需多少时间？

解：由题意得甲船速 + 水速 = $360 \div 10 = 36$

甲船速 - 水速 = $360 \div 18 = 20$

可见 $(36 - 20)$ 相当于水速的 2 倍，

所以，水速为每小时 $(36 - 20) \div 2 = 8$ (千米)

又因为，乙船速 - 水速 = $360 \div 15$ ，

所以，乙船速为 $360 \div 15 + 8 = 32$ (千米)

乙船顺水速为 $32 + 8 = 40$ (千米)

所以，乙船顺水航行 360 千米需要 $360 \div 40 = 9$ (小时)

答：乙船返回原地需要 9 小时。

例 3 一架飞机飞行在两个城市之间，飞机的速度是每小时 576 千米，风速为每小时 24 千米，飞机逆风飞行 3 小时到达，顺风飞回需要几小时？

解：这道题可以按照流水问题来解答。

(1) 两城相距多少千米？ $(576 - 24) \times 3 = 1656$ (千米)

(2) 顺风飞回需要多少小时？ $1656 \div (576 + 24) = 2.76$ (小时)

列成综合算式 $[(576 - 24) \times 3] \div (576 + 24) = 2.76$ (小时)

答：飞机顺风飞回需要 2.76 小时。

12、列车问题

【含义】 这是与列车行驶有关的一些问题，解答时要注意列车车身的长度。

【数量关系】 火车过桥：过桥时间 = (车长 + 桥长) \div 车速

火车追及：追及时间 = (甲车长 + 乙车长 + 距离) \div (甲车速 - 乙车速)

火车相遇：相遇时间 = (甲车长 + 乙车长 + 距离) \div (甲车速 + 乙车速)

【解题思路和方法】 大多数情况可以直接利用数量关系的公式。

例 1 一座大桥长 2400 米，一列火车以每分钟 900 米的速度通过大桥，从车头开上桥到车尾离开桥共需要 3 分钟。这列火车长多少米？

解：火车 3 分钟所行的路程，就是桥长与火车车身长度的和。

(1) 火车 3 分钟行多少米？ $900 \times 3 = 2700$ (米)

(2) 这列火车长多少米？ $2700 - 2400 = 300$ (米)

列成综合算式 $900 \times 3 - 2400 = 300$ (米)

答：这列火车长 300 米。

例 2 一列长 200 米的火车以每秒 8 米的速度通过一座大桥，用了 2 分 5 秒钟时间，求大桥的长度是多少米？

解：火车过桥所用的时间是 2 分 5 秒 = 125 秒，所走的路程是 (8×125) 米，这段路程就是 $(200 \text{ 米} + \text{桥长})$ ，所以，桥长为

$$8 \times 125 - 200 = 800 \text{ (米)}$$

答：大桥的长度是 800 米。

例 3 一列长 225 米的慢车以每秒 17 米的速度行驶，一列长 140 米的快车以每秒 22 米的速度在后面追赶，求快车从追上到追过慢车需要多长时间？

解：从追上到追过，快车比慢车要多行 $(225 + 140)$ 米，而快车比慢车每秒多行 $(22 - 17)$ 米，因此，所求的时间为

$$(225 + 140) \div (22 - 17) = 73 \text{ (秒)}$$

答：需要 73 秒。

例 4 一列长 150 米的列车以每秒 22 米的速度行驶，有一个扳道工人以每秒 3 米的速度迎面走来，那么，火车从工人身旁驶过需要多少时间？

解：如果把工人看作一列长度为零的火车，原题就相当于火车相遇问题。

$$150 \div (22 + 3) = 6 \text{ (秒)}$$

答：火车从工人身旁驶过需要 6 秒钟。

例 5 一列火车穿越一条长 2000 米的隧道用了 88 秒，以同样的速度通过一条长 1250 米的大桥用了 58 秒。求这列火车的车速和车身长度各是多少？

解：车速和车长都没有变，但通过隧道和大桥所用的时间不同，是因为隧道比大桥长。可知火车在 $(88 - 58)$ 秒的时间内行驶了 $(2000 - 1250)$ 米的路程，因此，火车的车速为每秒

$$(2000 - 1250) \div (88 - 58) = 25 \text{ (米)}$$

进而可知，车长和桥长的和为 (25×58) 米，

因此，车长为 $25 \times 58 - 1250 = 200$ (米)

答：这列火车的车速是每秒 25 米，车身高 200 米。

13、时钟问题

【含义】就是研究钟面上时针与分针关系的问题，如两针重合、两针垂直、两针成一线、两针夹角为 60 度等。时钟问题可与追及问题相类比。

【数量关系】分针的速度是时针的 12 倍，

二者的速度差为 $11/12$ 。

通常按追及问题来对待，也可以按差倍问题来计算。

【解题思路和方法】变通为“追及问题”后可以直接利用公式。

例 1 从时针指向 4 点开始，再经过多少分钟时针正好与分针重合？

解：钟面的一周分为 60 格，分针每分钟走一格，每小时走 60 格；时针每小时走 5 格，每分钟走 $5/60=1/12$ 格。每分钟分针比时针多走 $(1-1/12)=11/12$ 格。4 点整，时针在前，分针在后，两针相距 20 格。所以

分针追上时针的时间为 $20 \div (1-1/12) \approx 22$ (分)

答：再经过 22 分钟时针正好与分针重合。

例 2 四点和五点之间，时针和分针在什么时候成直角？

解：

钟面上有 60 格，它的 $1/4$ 是 15 格，因而两针成直角的时候相差 15 格（包括分针在时针的前或后 15 格两种情况）。四点整的时候，分针在时针后 (5×4) 格，如果分针在时针后与它成直角，那么分针就要比时针多走 $(5 \times 4 - 15)$ 格，如果分针在时针前与它成直角，那么分针就要比时针多走 $(5 \times 4 + 15)$ 格。再根据 1 分钟分针比时针多走 $(1-1/12)$ 格就可以求出二针成直角的时间。

$$(5 \times 4 - 15) \div (1 - 1/12) \approx 6 \text{ (分)}$$

$$(5 \times 4 + 15) \div (1 - 1/12) \approx 38 \text{ (分)}$$

答：4 点 06 分及 4 点 38 分时两针成直角。

例 3 六点与七点之间什么时候时针与分针重合？

解：六点整的时候，分针在时针后 (5×6) 格，分针要与时针重合，就得追上时针。这实际上是一个追及问题。

$$(5 \times 6) \div (1 - 1/12) \approx 33 \text{ (分)}$$

答：6 点 33 分的时候分针与时针重合。

14、盈亏问题

【含义】根据一定的人数，分配一定的物品，在两次分配中，一次有余（盈），一次不足（亏），或两次都有余，或两次都不足，求人数或物品数，这类应用题叫做盈亏问题。

【数量关系】一般地说，在两次分配中，如果一次盈，一次亏，则有：

$$\text{参加分配总人数} = (\text{盈} + \text{亏}) \div \text{分配差}$$

如果两次都盈或都亏，则有：

$$\text{参加分配总人数} = (\text{大盈} - \text{小盈}) \div \text{分配差}$$

$$\text{参加分配总人数} = (\text{大亏} - \text{小亏}) \div \text{分配差}$$

【解题思路和方法】大多数情况可以直接利用数量关系的公式。

例 1 给幼儿园小朋友分苹果，若每人分 3 个就余 11 个；若每人分 4 个就少 1 个。问有多少小朋友？有多少个苹果？

解：按照“参加分配的总人数 = $(\text{盈} + \text{亏}) \div \text{分配差}$ ”的数量关系：

$$(1) \text{ 有小朋友多少人? } (11 + 1) \div (4 - 3) = 12 \text{ (人)}$$

$$(2) \text{ 有多少个苹果? } 3 \times 12 + 11 = 47 \text{ (个)}$$

答：有小朋友 12 人，有 47 个苹果。

例 2 修一条公路，如果每天修 260 米，修完全长就得延长 8 天；如果每天修 300 米，修完全长仍得延长 4 天。这条路全长多少米？

解：题中原定完成任务的天数，就相当于“参加分配的总人数”，按照“参加分配的总人数 = (大亏 - 小亏) ÷ 分配差”的数量关系，可以得知

原定完成任务的天数为

$$(260 \times 8 - 300 \times 4) \div (300 - 260) = 22 \text{ (天)}$$

这条路全长为 $300 \times (22 + 4) = 7800$ (米)

答：这条路全长 7800 米。

例 3 学校组织春游，如果每辆车坐 40 人，就余下 30 人；如果每辆车坐 45 人，就刚好坐完。问有多少车？多少人？

解：本题中的车辆数就相当于“参加分配的总人数”，于是就有

$$(1) \text{ 有多少车？} (30 - 0) \div (45 - 40) = 6 \text{ (辆)}$$

$$(2) \text{ 有多少人？} 40 \times 6 + 30 = 270 \text{ (人)}$$

答：有 6 辆车，有 270 人。

15、工程问题

【含义】 工程问题主要研究工作量、工作效率和工作时间三者之间的关系。这类问题在已知条件中，常常不给出工作量的具体数量，只提出“一项工程”、“一块土地”、“一条水渠”、“一件工作”等，在解题时，常常用单位“1”表示工作总量。

【数量关系】 解答工程问题的关键是把工作总量看作“1”，这样，工作效率就是工作时间的倒数（它表示单位时间内完成工作总量的几分之几），进而就可以根据工作量、工作效率、工作时间三者之间的关系列出算式。

$$\text{工作量} = \text{工作效率} \times \text{工作时间}$$

$$\text{工作时间} = \text{工作量} \div \text{工作效率}$$

$$\text{工作时间} = \text{总工作量} \div (\text{甲工作效率} + \text{乙工作效率})$$

【解题思路和方法】 变通后可以利用上述数量关系的公式。

例 1 一项工程，甲队单独做需要 10 天完成，乙队单独做需要 15 天完成，现在两队合作，需要几天完成？

解：题中的“一项工程”是工作总量，由于没有给出这项工程的具体数量，因此，把此项工程看作单位“1”。由于甲队独做需 10 天完成，那么每天完成这项工程的 $1/10$ ；乙队单独做需 15 天完成，每天完成这项工程的 $1/15$ ；两队合做，每天可以完成这项工程的 $(1/10 + 1/15)$ 。

$$\text{由此可以列出算式：} 1 \div (1/10 + 1/15) = 1 \div 1/6 = 6 \text{ (天)}$$

答：两队合做需要 6 天完成。

例 2 一批零件，甲独做 6 小时完成，乙独做 8 小时完成。现在两人合做，完成任务时甲比乙多做 24 个，求这批零件共有多少个？

解：设总工作量为 1，则甲每小时完成 $1/6$ ，乙每小时完成 $1/8$ ，甲比乙每小时多完成 $(1/6 - 1/8)$ ，二人合做时每小时完成 $(1/6 + 1/8)$ 。因为二人合做需要 $[1 \div (1/6 + 1/8)]$ 小时，这个时间内，甲比乙多做 24 个零件，所以

(1) 每小时甲比乙多做多少零件？

$$24 \div [1 \div (1/6 + 1/8)] = 7 \text{ (个)}$$

(2) 这批零件共有多少个？

$$7 \div (1/6 - 1/8) = 168 \text{ (个)}$$

答：这批零件共有 168 个。

解二：

上面这道题还可以用另一种方法计算：

两人合做，完成任务时甲乙的工作量之比为 $1/6 : 1/8 = 4 : 3$

由此可知，甲比乙多完成总工作量的 $4 - 3/4 + 3 = 1/7$

所以，这批零件共有 $24 \div 1/7 = 168$ (个)

例 3 一件工作，甲独做 12 小时完成，乙独做 10 小时完成，丙独做 15 小时完成。现在甲先做 2 小时，余下的由乙丙二人合做，还需几小时才能完成？

解：必须先求出各人每小时的工作效率。如果能把效率用整数表示，就会给计算带来方便，因此，我们设总工作量为 12、10、和 15 的某一公倍数，例如最小公倍数 60，则甲乙丙三人的工作效率分别是

$$60 \div 12 = 5 \quad 60 \div 10 = 6 \quad 60 \div 15 = 4$$

因此余下的工作量由乙丙合做还需要

$$(60 - 5 \times 2) \div (6 + 4) = 5 \text{ (小时)}$$

答：还需要 5 小时才能完成。也可以用 $(1 - 1/12 \times 2) / (1/10 + 1/15)$

例 4 一个水池，底部装有一个常开的排水管，上部装有若干个同样粗细的进水管。当打开 4 个进水管时，需要 5 小时才能注满水池；当打开 2 个进水管时，需要 15 小时才能注满水池；现在要用 2 小时将水池注满，至少要打开多少个进水管？

解：注（排）水问题是一类特殊的工程问题。往水池注水或从水池排水相当于一项工程，水的流量就是工作量，单位时间内水的流量就是工作效率。

要 2 小时内将水池注满，即要使 2 小时内的进水量与排水量之差刚好是一池水。为此需要知道进水管、排水管的工作效率及总工作量（一池水）。只要设某一个量为单位 1，其余两个量便可由条件推出。

我们设每个同样的进水管每小时注水量为 1，则 4 个进水管 5 小时注水量为 $(1 \times 4 \times 5)$ ，2 个进水管 15 小时注水量为 $(1 \times 2 \times 15)$ ，从而可知

$$\text{每小时的排水量为 } (1 \times 2 \times 15 - 1 \times 4 \times 5) \div (15 - 5) = 1$$

即一个排水管与每个进水管的工作效率相同。由此可知

$$\text{一池水的总工作量为 } 1 \times 4 \times 5 - 1 \times 5 = 15$$

又因为在 2 小时内，每个进水管的注水量为 1×2 ，

所以，2 小时内注满一池水

$$\text{至少需要多少个进水管？ } (15 + 1 \times 2) \div (1 \times 2) = 8.5 \approx 9 (\text{个})$$

答：至少需要 9 个进水管。

16、正反比例问题

【含义】两种相关联的量，一种量变化，另一种量也随着变化，如果这两种量中相对应的两个数的比的比值一定（即商一定），那么这两种量就叫做成正比例的量，它们的关系叫做正比例关系。正比例应用题是正比例意义和解比例等知识的综合运用。

两种相关联的量，一种量变化，另一种量也随着变化，如果这两种量中相对应的两个数的积一定，这两种量就叫做成反比例的量，它们的关系叫做反比例关系。反比例应用题是反比例的意义和解比例等知识的综合运用。

【数量关系】判断正比例或反比例关系是解这类应用题的关键。许多典型应用题都可以转化为正反比例问题去解决，而且比较简捷。

【解题思路和方法】解决这类问题的重要方法是：把分率（倍数）转化为比，应用比和比例的性质去解应用题。

正反比例问题与前面讲过的倍比问题基本类似。

例 1 修一条公路，已修的是未修的 $\frac{1}{3}$ ，再修 300 米后，已修的变成未修的 $\frac{1}{2}$ ，求这条公路总长是多少米？

解：由条件知，公路总长不变。

$$\text{原已修长度：总长度} = 1 : (1 + 3) = 1 : 4 = 3 : 12$$

$$\text{现已修长度：总长度} = 1 : (1 + 2) = 1 : 3 = 4 : 12$$

比较以上两式可知，把总长度当作 12 份，则 300 米相当于 $(4 - 3)$ 份，

$$\text{从而知公路总长为 } 300 \div (4 - 3) \times 12 = 3600 (\text{米})$$

答：这条公路总长 3600 米。

例 2 张晗做 4 道应用题用了 28 分钟，照这样计算，91 分钟可以做几道应用题？

解：做题效率一定，做题数量与做题时间成正比例关系

$$\text{设 91 分钟可以做 } X \text{ 应用题则有 } 28 : 4 = 91 : X$$

$$28X = 91 \times 4 \Rightarrow X = 91 \times 4 \div 28 = 13$$

答：91 分钟可以做 13 道应用题。

例 3 孙亮看《十万个为什么》这本书，每天看 24 页，15 天看完，如果每天看 36 页，几天就可以看完？

解：书的页数一定，每天看的页数与需要的天数成反比例关系

设 X 天可以看完，就有 $24 : 36 = X : 15$

$$36X = 24 \times 15 \quad X = 10$$

答：10 天就可以看完。

例 4 一个大矩形被分成六个小矩形，其中四个小矩形的面积如图所示，求大矩形的面积。

A	25	20
36	B	16

解：由面积 \div 宽 = 长可知，当长一定时，面积与宽成正比，所以每一上下两个小矩形面积之比就等于它们的宽的正比。又因为第一行三个小矩形的宽相等，第二行三个小矩形的宽也相等。因此，

$$A : 36 = 20 : 16 \quad 25 : B = 20 : 16$$

解这两个比例，得 $A = 45, B = 20$

所以，大矩形面积为 $45 + 36 + 25 + 20 + 20 + 16 = 162$

答：大矩形的面积是 162。

17、按比例分配问题

【含义】 所谓按比例分配，就是把一个数按照一定的比分成若干份。这类题的已知条件一般有两种形式：一是用比或连比的形式反映各部分占总数量的份数，另一种是直接给出份数。

【数量关系】 从条件看，已知总量和几个部分量的比；从问题看，求几个部分量各是多少。

总份数 = 比的前后项之和

【解题思路和方法】 先把各部分量的比转化为各占总量的几分之几，把比的前后项相加求出总份数，再求各部分占总量的几分之几（以总份数作分母，比的前后项分别作分子），再按照求一个数的几分之几是多少的计算方法，分别求出各部分量的值。

例 1 学校把植树 560 棵的任务按人数分配给五年级三个班，已知一班有 47 人，二班有 48 人，三班有 45 人，三个班各植树多少棵？

解：总份数为 $47 + 48 + 45 = 140$

一班植树 $560 \times 47 / 140 = 188$ （棵）

二班植树 $560 \times 48 / 140 = 192$ （棵）

三班植树 $560 \times 45 / 140 = 180$ （棵）答：一、二、三班分别植树 188 棵、192 棵、180 棵。

例 2 用 60 厘米长的铁丝围成一个三角形，三角形三条边的比是 3 : 4 : 5。三条边的长各是多少厘米？

解： $3+4+5=1260 \times 3/12=15$ （厘米）

$60 \times 4/12=20$ （厘米）

$60 \times 5/12=25$ （厘米）

答：三角形三条边的长分别是 15 厘米、20 厘米、25 厘米。

例 3 从前有个牧民，临死前留下遗言，要把 17 只羊分给三个儿子，大儿子分总数的 $1/2$ ，二儿子分总数的 $1/3$ ，三儿子分总数的 $1/9$ ，并规定不许把羊宰割分，求三个儿子各分多少只羊。

解：

如果用总数乘以分率的方法解答，显然得不到符合题意的整数解。如果用按比例分配的方法解，则很容易得到

$$1/2 : 1/3 : 1/9 = 9 : 6 : 2$$

$$9 + 6 + 2 = 17 \quad 17 \times 9/17 = 9$$

$$17 \times 6/17 = 6 \quad 17 \times 2/17 = 2$$

答：大儿子分得 9 只羊，二儿子分得 6 只羊，三儿子分得 2 只羊。

例 4 某工厂第一、二、三车间人数之比为 $8 : 12 : 21$ ，第一车间比第二车间少 80 人，三个车间共多少人？

人 数	80 人	一 共
对应的份数	$12-8$	$8+12+21$

解： $80 \div (12-8) \times (8+12+21) = 820$ （人）

答：三个车间一共 820 人。

18、百分数问题

【含义】百分数是表示一个数是另一个数的百分之几的数。百分数是一种特殊的分数。分数常常可以通分、约分，而百分数则无需；分数既可以表示“率”，也可以表示“量”，而百分数只能表示“率”；分数的分子、分母必须是自然数，而百分数的分子可以是小数；百分数有一个专门的记号“%”。

在实际中和常用到“百分点”这个概念，一个百分点就是 1%，两个百分点就是 2%。

【数量关系】掌握“百分数”、“标准量”“比较量”三者之间的数量关系：

$$\text{百分数} = \text{比较量} \div \text{标准量}$$

$$\text{标准量} = \text{比较量} \div \text{百分数}$$

【解题思路和方法】一般有三种基本类型：

- (1) 求一个数是另一个数的百分之几；
- (2) 已知一个数，求它的百分之几是多少；
- (3) 已知一个数的百分之几是多少，求这个数。

例 1 仓库里有一批化肥，用去 720 千克，剩下 6480 千克，用去的与剩下的各占原重量的百分之几？

解： (1) 用去的占 $720 \div (720+6480) = 10\%$

(2) 剩下的占 $6480 \div (720 + 6480) = 90\%$

答：用去了 10%，剩下 90%。

例 2 红旗化工厂有男职工 420 人，女职工 525 人，男职工人数比女职工少百分之几？

解：本题中女职工人数为标准量，男职工比女职工少的人数是比较量所以 $(525 - 420) \div 525 = 0.2 = 20\%$

或者 $1 - 420 \div 525 = 0.2 = 20\%$

答：男职工人数比女职工少 20%。

例 3 红旗化工厂有男职工 420 人，女职工 525 人，女职工比男职工人数多百分之几？

解：本题中以男职工人数为标准量，女职工比男职工多的人数为比较量，因此

$(525 - 420) \div 420 = 0.25 = 25\%$

或者 $525 \div 420 - 1 = 0.25 = 25\%$

答：女职工人数比男职工多 25%。

例 4 红旗化工厂有男职工 420 人，有女职工 525 人，男、女职工各占全厂职工总数的百分之几？

解：(1) 男职工占 $420 \div (420 + 525) = 0.444 = 44.4\%$

(2) 女职工占 $525 \div (420 + 525) = 0.556 = 55.6\%$

答：男职工占全厂职工总数的 44.4%，女职工占 55.6%。

例 5 百分数又叫百分率，百分率在工农业生产中应用很广泛，常见的百分率有：

增长率 = 增长数 \div 原来基数 $\times 100\%$

合格率 = 合格产品数 \div 产品总数 $\times 100\%$

出勤率 = 实际出勤人数 \div 应出勤人数 $\times 100\%$

出勤率 = 实际出勤天数 \div 应出勤天数 $\times 100\%$

缺席率 = 缺席人数 \div 实有总人数 $\times 100\%$

发芽率 = 发芽种子数 \div 试验种子总数 $\times 100\%$

成活率 = 成活棵数 \div 种植总棵数 $\times 100\%$

出粉率 = 面粉重量 \div 小麦重量 $\times 100\%$

出油率 = 油的重量 \div 油料重量 $\times 100\%$

废品率 = 废品数量 \div 全部产品数量 $\times 100\%$

命中率 = 命中次数 \div 总次数 $\times 100\%$

烘干率 = 烘干后重量 \div 烘前重量 $\times 100\%$

及格率 = 及格人数 \div 参加考试人数 $\times 100\%$

19、“牛吃草”问题

【含义】“牛吃草”问题是大科学家牛顿提出的问题，也叫“牛顿问题”。这类问题的特点在于要考虑草边吃边长这个因素。

【数量关系】草总量 = 原有草量 + 草每天生长量 \times 天数

【解题思路和方法】解这类题的关键是求出草每天的生长量。

例 1 一块草地，10 头牛 20 天可以把草吃完，15 头牛 10 天可以把草吃完。问多少头牛 5 天可以把草吃完？

解：草是均匀生长的，所以，草总量 = 原有草量 + 草每天生长量 × 天数。求“多少头牛 5 天可以把草吃完”，就是说 5 天内的草总量要 5 天吃完的话，得有多少头牛？设每头牛每天吃草量为 1，按以下步骤解答：

(1) 求草每天的生长量

因为，一方面 20 天内的草总量就是 10 头牛 20 天所吃的草，即 $(1 \times 10 \times 20)$ ；另一方面，20 天内的草总量又等于原有草量加上 20 天内的生长量，所以

$$1 \times 10 \times 20 = \text{原有草量} + 20 \text{ 天内生长量}$$

$$\text{同理 } 1 \times 15 \times 10 = \text{原有草量} + 10 \text{ 天内生长量}$$

由此可知 $(20 - 10)$ 天内草的生长量为

$$1 \times 10 \times 20 - 1 \times 15 \times 10 = 50$$

$$\text{因此，草每天的生长量为 } 50 \div (20 - 10) = 5$$

(2) 求原有草量

$$\begin{aligned} \text{原有草量} &= 10 \text{ 天内总草量} - 10 \text{ 天内生长量} = 1 \times 15 \times 10 - 5 \times 10 \\ &= 100 \end{aligned}$$

(3) 求 5 天内草总量

$$5 \text{ 天内草总量} = \text{原有草量} + 5 \text{ 天内生长量} = 100 + 5 \times 5 = 125$$

(4) 求多少头牛 5 天吃完草

因为每头牛每天吃草量为 1，所以每头牛 5 天吃草量为 5。

因此 5 天吃完草需要牛的头数 $125 \div 5 = 25$ (头)

答：需要 25 头牛 5 天可以把草吃完。

例 2 一只船有一个漏洞，水以均匀速度进入船内，发现漏洞时已经进了一些水。如果有 12 个人淘水，3 小时可以淘完；如果只有 5 人淘水，要 10 小时才能淘完。求 17 人几小时可以淘完？

解：这是一道变相的“牛吃草”问题。与上题不同的是，最后一问给出了人数（相当于“牛数”），求时间。设每人每小时淘水量为 1，按以下步骤计算：

(1) 求每小时进水量

因为，3 小时内的总水量 = $1 \times 12 \times 3 = \text{原有水量} + 3 \text{ 小时进水量}$

10 小时内的总水量 = $1 \times 5 \times 10 = \text{原有水量} + 10 \text{ 小时进水量}$

所以， $(10 - 3)$ 小时内的进水量为 $1 \times 5 \times 10 - 1 \times 12 \times 3 = 14$

因此，每小时的进水量为 $14 \div (10 - 3) = 2$

(2) 求淘水前原有水量

$$\text{原有水量} = 1 \times 12 \times 3 - 3 \text{ 小时进水量} = 36 - 2 \times 3 = 30$$

(3) 求 17 人几小时淘完

17 人每小时淘水量为 17，因为每小时漏进水为 2，所以实际上船中每小时减少的水量为 $(17 - 2)$ ，所以 17 人淘完水的时间是

$$30 \div (17 - 2) = 2 \text{ (小时)}$$

答：17人2小时可以淘完水。

20、鸡兔同笼问题

【含义】这是古典的算术问题。已知笼子里鸡、兔共有多少只和多少只脚，求鸡、兔各有多少只的问题，叫做第一鸡兔同笼问题。已知鸡兔的总数和鸡脚与兔脚的差，求鸡、兔各是多少的问题叫做第二鸡兔同笼问题。

【数量关系】第一鸡兔同笼问题：

假设全都是鸡，则有

$$\text{兔数} = (\text{实际脚数} - 2 \times \text{鸡兔总数}) \div (4 - 2)$$

假设全都是兔，则有

$$\text{鸡数} = (4 \times \text{鸡兔总数} - \text{实际脚数}) \div (4 - 2)$$

第二鸡兔同笼问题：

假设全都是鸡，则有

$$\text{兔数} = (2 \times \text{鸡兔总数} - \text{鸡与兔脚之差}) \div (4 + 2)$$

假设全都是兔，则有

$$\text{鸡数} = (4 \times \text{鸡兔总数} + \text{鸡与兔脚之差}) \div (4 + 2)$$

【解题思路和方法】解答此类题目一般都用假设法，可以先假设都是鸡，也可以假设都是兔。如果先假设都是鸡，然后以兔换鸡；如果先假设都是兔，然后以鸡换兔。这类问题也叫置换问题。通过先假设，再置换，使问题得到解决。

例1 长毛兔子芦花鸡，鸡兔圈在一笼里。数数头有三十五，脚数共有九十四。请你仔细算一算，多少兔子多少鸡？

解：假设35只全为兔，则

$$\text{鸡数} = (4 \times 35 - 94) \div (4 - 2) = 23 \text{ (只)}$$

$$\text{兔数} = 35 - 23 = 12 \text{ (只)}$$

也可以先假设35只全为鸡，则

$$\text{兔数} = (94 - 2 \times 35) \div (4 - 2) = 12 \text{ (只)}$$

$$\text{鸡数} = 35 - 12 = 23 \text{ (只)}$$

答：有鸡23只，有兔12只。

例2 2亩菠菜要施肥1千克，5亩白菜要施肥3千克，两种菜共16亩，施肥9千克，求白菜有多少亩？

解：此题实际上是改头换面的“鸡兔同笼”问题。“每亩菠菜施肥 $(1 \div 2)$ 千克”与“每只鸡有两个脚”相对应，“每亩白菜施肥 $(3 \div 5)$ 千克”与“每只兔有4只脚”相对应，“16亩”与“鸡兔总数”相对应，“9千克”与“鸡兔总脚数”相对应。假设16亩全都是菠菜，则有

$$\text{白菜亩数} = (9 - 1 \div 2 \times 16) \div (3 \div 5 - 1 \div 2) = 10 \text{ (亩)}$$

答：白菜地有10亩。

例 3 李老师用 69 元给学校买作业本和日记本共 45 本，作业本每本 3.20 元，日记本每本 0.70 元。问作业本和日记本各买了多少本？

解：此题可以变通为“鸡兔同笼”问题。假设 45 本全都是日记本，则有

$$\text{作业本数} = (69 - 0.70 \times 45) \div (3.20 - 0.70) = 15 \text{ (本)}$$

$$\text{日记本数} = 45 - 15 = 30 \text{ (本)}$$

答：作业本有 15 本，日记本有 30 本。

例 4 （第二鸡兔同笼问题）鸡兔共有 100 只，鸡的脚比兔的脚多 80 只，问鸡与兔各多少只？

解：假设 100 只全都是鸡，则有

$$\text{兔数} = (2 \times 100 - 80) \div (4 + 2) = 20 \text{ (只)}$$

$$\text{鸡数} = 100 - 20 = 80 \text{ (只)}$$

答：有鸡 80 只，有兔 20 只。

例 5 有 100 个馍 100 个和尚吃，大和尚一人吃 3 个馍，小和尚 3 人吃 1 个馍，问大小和尚各多少人？

解：假设全为大和尚，则共吃馍 (3×100) 个，比实际多吃 $(3 \times 100 - 100)$ 个，这是因为把小和尚也算成了大和尚，因此我们在保证和尚总数 100 不变的情况下，以“小”换“大”，一个小和尚换掉一个大和尚可减少馍 $(3 - 1/3)$ 个。因此，共有小和尚

$$(3 \times 100 - 100) \div (3 - 1/3) = 75 \text{ (人)}$$

$$\text{共有大和尚 } 100 - 75 = 25 \text{ (人)}$$

答：共有大和尚 25 人，有小和尚 75 人。

21、方阵问题

【含义】 将若干人或物依一定条件排成正方形（简称方阵），根据已知条件求总人数或总物数，这类问题就叫做方阵问题。

【数量关系】（1）方阵每边人数与四周人数的关系：

$$\text{四周人数} = (\text{每边人数} - 1) \times 4$$

$$\text{每边人数} = \text{四周人数} \div 4 + 1$$

（2）方阵总人数的求法：

实心方阵：总人数 = 每边人数 \times 每边人数

空心方阵：总人数 = (外边人数) $-$ (内边人数)

内边人数 = 外边人数 $-$ 层数 $\times 2$

（3）若将空心方阵分成四个相等的矩形计算，则：

$$\text{总人数} = (\text{每边人数} - \text{层数}) \times \text{层数} \times 4$$

【解题思路和方法】 方阵问题有实心与空心两种。实心方阵的求法是以每边的数自乘；空心方阵的变化较多，其解答方法应根据具体情况确定。

例 1 在育才小学的运动会上，进行体操表演的同学排成方阵，每行 22 人，参加体操表演的同学一共有多少人？

解： $22 \times 22 = 484$ （人）

答：参加体操表演的同学一共有 484 人。

例 2 有一个 3 层中空方阵，最外边一层有 10 人，求全方阵的人数。

解： $10 \times 10 - (10 - 3 \times 2) \times (10 - 3 \times 2) = 84$ （人）

答：全方阵 84 人。

例 3 有一队学生，排成一个中空方阵，最外层人数是 52 人，最内层人数是 28 人，这队学生共多少人？

解：（1）中空方阵外层每边人数 $= 52 \div 4 + 1 = 14$ （人）

（2）中空方阵内层每边人数 $= 28 \div 4 - 1 = 6$ （人）

（3）中空方阵的总人数 $= 14 \times 14 - 6 \times 6 = 160$ （人）

答：这队学生共 160 人。

例 4 一堆棋子，排列成正方形，多余 4 棋子，若正方形纵横两个方向各增加一层，则缺少 9 只棋子，问有棋子多少个？

解：（1）纵横方向各增加一层所需棋子数 $= 4 + 9 = 13$ （只）

（2）纵横增加一层后正方形每边棋子数 $= (13 + 1) \div 2 = 7$ （只）

（3）原有棋子数 $= 7 \times 7 - 9 = 40$ （只）

答：棋子有 40 只。

例 5 有一个三角形树林，顶点上有 1 棵树，以下每排的树都比前一排多 1 棵，最下面一排有 5 棵树。这个树林一共有多少棵树？

解：第一种方法： $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ （棵）

第二种方法： $(5 + 1) \times 5 \div 2 = 15$ （棵）

答：这个三角形树林一共有 15 棵树。

22、商品利润问题

【含义】 这是一种在生产经营中经常遇到的问题，包括成本、利润、利润率和亏损、亏损率等方面的问题。

【数量关系】 利润 = 售价 - 进货价

利润率 = (售价 - 进货价) \div 进货价 $\times 100\%$

售价 = 进货价 $\times (1 + \text{利润率})$

亏损 = 进货价 - 售价

亏损率 = (进货价 - 售价) \div 进货价 $\times 100\%$

【解题思路和方法】 简单的题目可以直接利用公式，复杂的题目变通后利用公式。

例 1 某商品的平均价格在一月份上调了 10%，到二月份又下调了 10%，这种商品从原价到二月份的价格变动情况如何？

解：设这种商品的原价为 1，则一月份售价为 $(1 + 10\%)$ ，二月份的售价为 $(1 + 10\%) \times (1 - 10\%)$ ，所以二月份售价比原价下降了

$$1 - (1 + 10\%) \times (1 - 10\%) = 1\%$$

答：二月份比原价下降了 1%。

例 2 某服装店因搬迁，店内商品八折销售。苗苗买了一件衣服用去 52 元，已知衣服原来按期望盈利 30% 定价，那么该店是亏本还是盈利？亏（盈）率是多少？

解：要知亏还是盈，得知实际售价 52 元比成本少多少或多多少元，进而需知成本。因为 52 元是原价的 80%，所以原价为 $(52 \div 80\%)$ 元；又因为原价是按期望盈利 30% 定的，

$$\text{所以成本为 } 52 \div 80\% \div (1 + 30\%) = 50 \text{ (元)}$$

可以看出该店是盈利的，盈利率为 $(52 - 50) \div 50 = 4\%$

答：该店是盈利的，盈利率是 4%。

例 3 成本 0.25 元的作业本 1200 册，按期望获得 40% 的利润定价出售，当销售出 80% 后，剩下的作业本打折扣，结果获得的利润是预定的 86%。问剩下的作业本出售时按定价打了多少折扣？

解：问题是要计算剩下的作业本每册实际售价是原定价的百分之几。从题意可知，每册的原定价是 $0.25 \times (1 + 40\%)$ ，所以关键是求出剩下的每册的实际售价，为此要知道剩下的每册盈利多少元。剩下的作业本售出后的盈利额等于实际总盈利与先售出的 80% 的盈利额之差，即

$$0.25 \times 1200 \times 40\% \times 86\% - 0.25 \times 1200 \times 40\% \times 80\% = 7.20 \text{ (元)}$$

$$\text{剩下的作业本每册盈利 } 7.20 \div [1200 \times (1 - 80\%)] = 0.03 \text{ (元)}$$

$$\text{又可知 } (0.25 + 0.03) \div [0.25 \times (1 + 40\%)] = 80\%$$

答：剩下的作业本是按原定价的八折出售的。

例 4 某种商品，甲店的进货价比乙店的进货价便宜 10%，甲店按 30% 的利润定价，乙店按 20% 的利润定价，结果乙店的定价比甲店的定价贵 6 元，求乙店的定价。

解：设乙店的进货价为 1，则甲店的进货价为 $1 - 10\% = 0.9$

$$\text{甲店定价为 } 0.9 \times (1 + 30\%) = 1.17$$

$$\text{乙店定价为 } 1 \times (1 + 20\%) = 1.20$$

$$\text{由此可得乙店进货价为 } 6 \div (1.20 - 1.17) = 200 \text{ (元)}$$

$$\text{乙店定价为 } 200 \times 1.2 = 240 \text{ (元)}$$

答：乙店的定价是 240 元。

23、存款利率问题

【含义】 把钱存入银行是有一定利息的，利息的多少，与本金、利率、存期这三个因素有关。利率一般有年利率和月利率两种。年利率是指存期一年本金所生利息占本金的百分数；月利率是指存期一月所生利息占本金的百分数。

【数量关系】 年（月）利率 = 利息 ÷ 本金 ÷ 存款年（月）数 × 100%

$$\text{利息} = \text{本金} \times \text{存款年（月）数} \times \text{年（月）利率}$$

本利和 = 本金 + 利息

= 本金 \times [1 + 年(月)利率 \times 存款年(月)数]

【解题思路和方法】简单的题目可直接利用公式，复杂的题目变通后再利用公式。

例 1 李大强存入银行 1200 元，月利率 0.8%，到期后连本带利共取出 1488 元，求存款期多长。

解：因为存款期内的总利息是 $(1488 - 1200)$ 元，
所以总利率为 $(1488 - 1200) \div 1200$ 又因为已知月利率，
所以存款月数为 $(1488 - 1200) \div 1200 \div 0.8\% = 30$ (月)
答：李大强的存款期是 30 月即两年半。

例 2 银行定期整存整取的年利率是：二年期 7.92%，三年期 8.28%，五年期 9%。如果甲乙二人同时各存入 1 万元，甲先存二年期，到期后连本带利改存三年期；乙直存五年期。五年后二人同时取出，那么，谁的收益多？多多少元？

解：甲的总利息 $[10000 \times 7.92\% \times 2 + [10000 \times (1 + 7.92\% \times 2)] \times 8.28\% \times 3]$
 $= 1584 + 11584 \times 8.28\% \times 3 = 4461.47$ (元)
乙的总利息 $10000 \times 9\% \times 5 = 4500$ (元)
 $4500 - 4461.47 = 38.53$ (元)
答：乙的收益较多，乙比甲多 38.53 元。

24、溶液浓度问题

【含义】在生产和生活中，我们经常会遇到溶液浓度问题。这类问题研究的主要是溶剂（水或其它液体）、溶质、溶液、浓度这几个量的关系。例如，水是一种溶剂，被溶解的东西叫溶质，溶解后的混合物叫溶液。溶质的量在溶液的量中所占的百分数叫浓度，也叫百分比浓度。

【数量关系】溶液 = 溶剂 + 溶质

浓度 = 溶质 \div 溶液 \times 100%

【解题思路和方法】简单的题目可直接利用公式，复杂的题目变通后再利用公式。

例 1 爷爷有 16% 的糖水 50 克，(1) 要把它稀释成 10% 的糖水，需加水多少克？(2) 若要把它变成 30% 的糖水，需加糖多少克？

解：(1) 需要加水多少克？ $50 \times 16\% \div 10\% - 50 = 30$ (克)

(2) 需要加糖多少克？ $50 \times (1 - 16\%) \div (1 - 30\%) - 50 = 10$ (克)

答：(1) 需要加水 30 克，(2) 需要加糖 10 克。

例 2 要把 30% 的糖水与 15% 的糖水混合，配成 25% 的糖水 600 克，需要 30% 和 15% 的糖水各多少克？

解：假设全用 30%的糖水溶液，那么含糖量就会多出 $600 \times (30\% - 25\%) = 30$ （克）

这是因为 30%的糖水多用了。于是，我们设想在保证总重量 600 克不变的情况下，用 15%的溶液来“换掉”一部分 30%的溶液。这样，每“换掉”100 克，就会减少糖 $100 \times (30\% - 15\%) = 15$ （克）所以需要“换掉”30%的溶液（即“换上”15%的溶液） $100 \times (30 \div 15) = 200$ （克）

由此可知，需要 15%的溶液 200 克。

需要 30%的溶液 $600 - 200 = 400$ （克）

答：需要 15%的糖水溶液 200 克，需要 30%的糖水 400 克。

例 3 甲容器有浓度为 12%的盐水 500 克，乙容器有 500 克水。把甲中盐水的一半倒入乙中，混合后再把乙中现有盐水的一半倒入甲中，混合后又把甲中的一部分盐水倒入乙中，使甲乙两容器中的盐水同样多。求最后乙中盐水的百分比浓度。

解：由条件知，倒了三次后，甲乙两容器中溶液重量相等，各为 500 克，因此，只要算出乙容器中最后的含盐量，便会知所求的浓度。下面列表推算：

	甲容器	乙容器
原有	盐水 500 盐 $500 \times 12\% = 60$	水 500
第一次把甲中一半 倒入乙中后	盐水 $500 \div 2 = 250$ 盐 $60 \div 2 = 30$	盐水 $500 + 250 = 750$ 盐 30
第二次把乙中一半 倒入甲中后	盐水 $250 + 375 = 625$ 盐 $30 + 15 = 45$	盐水 $750 \div 2 = 375$ 盐 $30 \div 2 = 15$
第三次使甲乙中盐 水同样多	盐水 500 盐 $45 - 9 = 36$	盐水 500 盐 $45 - 36 + 15 = 24$

由以上推算可知，

乙容器中最后盐水的百分比浓度为 $24 \div 500 = 4.8\%$

答：乙容器中最后的百分比浓度是 4.8%。

25、构图布数问题

【含义】这是一种数学游戏，也是现实生活中常用的数学问题。所谓“构图”，就是设计出一种图形；所谓“布数”，就是把一定的数字填入图中。“构图布数”问题的关键是要符合所给的条件。

【数量关系】根据不同题目的要求而定。

【解题思路和方法】通常多从三角形、正方形、圆形和五角星等图形方面考虑。按照题意来构图布数，符合题目所给的条件。

例 1 十棵树苗子，要栽五行子，每行四棵子，请你想法子。

解：符合题目要求的图形应是一个五角星。

$$4 \times 5 \div 2 = 10$$

因为五角星的 5 条边交叉重复，应减去一半。

例 2 九棵树苗子，要栽十行子，每行三棵子，请你想法子。

解：符合题目要求的图形是两个倒立交叉的等腰三角形，一个三角形的顶点在另一个三角形底边的中线上。

例 3 九棵树苗子，要栽三行子，每行四棵子，请你想法子。

解：符合题目要求的图形是一个三角形，每边栽 4 棵树，三个顶点上重复应减去，正好 9 棵。

$$4 \times 3 - 3 = 9$$

例 4 把 12 拆成 1 到 7 这七个数中三个不同数的和，有几种写法？请设计一种图形，填入这七个数，每个数只填一处，且每条线上三个数的和都等于 12。

解：共有五种写法，即 $12 = 1 + 4 + 7$ $12 = 1 + 5 + 6$ $12 = 2 + 3 + 7$

$$12 = 2 + 4 + 6$$
$$12 = 3 + 4 + 5$$

在这五个算式中，4 出现三次，其余的 1、2、3、5、6、7 各出现两次，因此，4 应位于三条线的交点处，其余数都位于两条线的交点处。

26、幻方问题

【含义】把 $n \times n$ 个自然数排在正方形的格子中，使各行、各列以及对角线上的各数之和都相等，这样的图叫做幻方。最简单的幻方是三级幻方。

【数量关系】每行、每列、每条对角线上各数的和都相等，这个“和”叫做“幻和”。

$$\text{三级幻方的幻和} = 45 \div 3 = 15$$

$$\text{五级幻方的幻和} = 325 \div 5 = 65$$

【解题思路和方法】首先要确定每行、每列以及每条对角线上各数的和（即幻和），其次是确定正中间方格的数，然后再确定其它方格中的数。

更多精彩请关注微信公众号：九流印象

例 1 把 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这九个数填入九个方格中，使每行、每列、每条对角线上三个数的和相等。

解：幻和的 3 倍正好等于这九个数的和，所以幻和为

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \div 3 = 45 \div 3 = 15$$

九个数在这八条线上反复出现构成幻和时，每个数用到的次数不全相同，最中心的那个数要用到四次（即出现在中行、中列、和两条对角线这四条线上），四角的四个数各用到三次，其余的四个数各用到两次。看来，用到四次的“中心数”地位重要，宜优先考虑。

设“中心数”为 X ，因为 X 出现在四条线上，而每条线上三个数之和等于15，所以 $(1+2+3+4+5+6+7+8+9) + (4-1)X = 15 \times 4$

即 $45 + 3X = 60$ 所以 $X = 5$

接着用奇偶分析法寻找其余四个偶数的位置，它们

2	7	6
9	5	1
4	3	8

分别在四个角，再确定其余四个奇数的位置，它们分别在中行、中列，进一步尝试，容易得到正确的结果。

例 2 把 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 这九个数填到九个方格中，使每行、每列、以及对角线上的各数之和都相等。

解：只有三行，三行用完了所给的 9 个数，所以每行三数之和为

$$(2+3+4+5+6+7+8+9+10) \div 3 = 18$$

9	2	7
4	6	8
5	10	3

假设符合要求的数都已经填好，那么三行、三列、两条对角线共 8 行上的三个数之和都等于 18，我们看 18 能写成哪三个数之和：

最大数是 10： $18 = 10 + 6 + 2 = 10 + 5 + 3$

最大数是 9： $18 = 9 + 7 + 2 = 9 + 6 + 3 = 9 + 5 + 4$

最大数是 8： $18 = 8 + 7 + 3 = 8 + 6 + 4$

最大数是 7： $18 = 7 + 6 + 5$ 刚好写成 8 个算式。

首先确定正中间方格的数。第二横行、第二竖行、两个斜行都用到正中间方格的数，共用了四次。观察上述 8 个算式，只有 6 被用了 4 次，所以正中间方格中应填 6。

然后确定四个角的数。四个角的数都用了三次，而上述 8 个算式中只有 9、7、5、3 被用了三次，所以 9、7、5、3 应填在四个角上。但还应兼顾两条对角线上三个数的和都为 18。

最后确定其它方格中的数。如图。

27、抽屉原则问题

【含义】把 3 只苹果放进两个抽屉中，会出现哪些结果呢？要么把 2 只苹果放进一个抽屉，剩下的一个放进另一个抽屉；要么把 3 只苹果都放进同一个抽屉中。这两种情况可用一句话表示：一定有一个抽屉中放了 2 只或 2 只以上的苹果。这就是数学中的抽屉原则问题。

【数量关系】基本的抽屉原则是：如果把 $n+1$ 个物体（也叫元素）放到 n 个抽屉中，那么至少有一个抽屉中放着 2 个或更多的物体（元素）。

抽屉原则可以推广为：如果有 m 个抽屉，有 $k \times m + r$ ($0 < r \leq m$) 个元素那么至少有一个抽屉中要放 $(k+1)$ 个或更多的元素。

通俗地说，如果元素的个数是抽屉个数的 k 倍多一些，那么至少有一个抽屉要放 $(k+1)$ 个或更多的元素。

【解题思路和方法】 (1) 改造抽屉，指出元素；

(2) 把元素放入（或取出）抽屉；

(3) 说明理由，得出结论。

例 1 育才小学有 367 个 2000 年出生的学生，那么其中至少有几个学生的生日是同一天？

解：由于 2000 年是闰年，全年共有 366 天，可以看作 366 个“抽屉”，把 367 个 1999 年出生的学生看作 367 个“元素”。367 个“元素”放进 366 个“抽屉”中，至少有一个“抽屉”中放有 2 个或更多的“元素”。这说明至少有 2 个学生的生日是同一天。

例 2 据说人的头发不超过 20 万根，如果陕西省有 3645 万人，根据这些数据，你知道陕西省至少有多少人头发根数一样多？

解：人的头发不超过 20 万根，可看作 20 万个“抽屉”，3645 万人可看作 3645 万个“元素”，把 3645 万个“元素”放到 20 万个“抽屉”中，得到

$3645 \div 20 = 182 \cdots 5$ 根据抽屉原则的推广规律，可知 $k+1 =$

答：陕西省至少有 183 人的头发根数一样多。

例 3 一个袋子里有一些球，这些球仅只有颜色不同。其中红球 10 个，白球 9 个，黄球 8 个，蓝球 2 个。某人闭着眼睛从中取出若干个，试问他至少要取多少个球，才能保证至少有 4 个球颜色相同？

解：把四种颜色的球的总数 $(3+3+3+2) = 11$ 看作 11 个“抽屉”，那么，至少要取 $(11+1)$ 个球才能保证至少有 4 个球的颜色相同。

答：他至少要取 12 个球才能保证至少有 4 个球的颜色相同。

28、公约公倍问题

【含义】 需要用公约数、公倍数来解答的应用题叫做公约数、公倍数问题。

【数量关系】 绝大多数要用最大公约数、最小公倍数来解答。

【解题思路和方法】 先确定题目中要用最大公约数或者最小公倍数，再求出答案。最大公约数和最小公倍数的求法，最常用的是“短除法”。

例 1 一张硬纸板长 60 厘米，宽 56 厘米，现在需要把它剪成若干个大小相同的最大的正方形，不许有剩余。问正方形的边长是多少？

解：硬纸板的长和宽的最大公约数就是所求的边长。

60 和 56 的最大公约数是 4。

答：正方形的边长是 4 厘米。

例 2 甲、乙、丙三辆汽车在环形马路上同向行驶，甲车行一周要 36 分钟，乙车行一周要 30 分钟，丙车行一周要 48 分钟，三辆汽车同时从同一个起点出发，问至少要多少时间这三辆汽车才能同时又在起点相遇？

解：要求多少时间才能在同一起点相遇，这个时间必定同时是 36、30、48 的倍数。因为问至少要多少时间，所以应是 36、30、48 的最小公倍数。36、30、48 的最小公倍数是 720。

答：至少要 720 分钟（即 12 小时）这三辆汽车才能同时又在起点相遇。

例 3 一个四边形广场，边长分别为 60 米，72 米，96 米，84 米，现要在四角和四边植树，若四边上每两棵树间距相等，至少要植多少棵树？

解：相邻两树的间距应是 60、72、96、84 的公约数，要使植树的棵数尽量少，须使相邻两树的间距尽量大，那么这个相等的间距应是 60、72、96、84 这几个数的最大公约数 12。

所以，至少应植树 $(60+72+96+84) \div 12 = 26$ （棵）

答：至少要植 26 棵树。

例 4 一盒围棋子，4 个 4 个地数多 1 个，5 个 5 个地数多 1 个，6 个 6 个地数还多 1 个。又知棋子总数在 150 到 200 之间，求棋子总数。

解：如果从总数中取出 1 个，余下的总数便是 4、5、6 的公倍数。因为 4、5、6 的最小公倍数是 60，又知棋子总数在 150 到 200 之间，所以这个总数为

$$60 \times 3 + 1 = 181 \text{ (个)}$$

答：棋子的总数是 181 个。

29、最值问题

【含义】科学的发展观认为，国民经济的发展既要讲求效率，又要节约能源，要少花钱多办事，办好事，以最小的代价取得最大的效益。这类应用题叫做最值问题。

【数量关系】一般是求最大值或最小值。

【解题思路和方法】按照题目的要求，求出最大值或最小值。

例 1 在火炉上烤饼，饼的两面都要烤，每烤一面需要 3 分钟，炉上只能同时放两块饼，现在需要烤三块饼，最少需要多少分钟？

解：先将两块饼同时放上烤，3 分钟后都熟了一面，这时将第一块饼取出，放入第三块饼，翻过第二块饼。再过 3 分钟取出熟了的第二块饼，翻过第三块饼，又放入第一块饼烤另一面，再烤 3 分钟即可。这样做，用的时间最少，为 9 分钟。

答：最少需要 9 分钟。

例 2 在一条公路上有五个卸煤场，每相邻两个之间的距离都是 10 千米，已知 1 号煤场存煤 100 吨，2 号煤场存煤 200 吨，5 号煤场存煤 400 吨，其余两个煤场是空的。现在要把所有的煤集中到一个煤场里，每吨煤运 1 千米花费 1 元，集中到几号煤场花费最少？

解：我们采用尝试比较的方法来解答。

集中到 1 号场总费用为 $1 \times 200 \times 10 + 1 \times 400 \times 40 = 18000$ （元）

集中到 2 号场总费用为 $1 \times 100 \times 10 + 1 \times 400 \times 30 = 13000$ （元）

集中到 3 号场总费用为 $1 \times 100 \times 20 + 1 \times 200 \times 10 + 1 \times 400 \times 10 = 12000$ （元）

集中到 4 号场总费用为 $1 \times 100 \times 30 + 1 \times 200 \times 20 + 1 \times 400 \times 10 = 11000$ （元）

集中到 5 号场总费用为 $1 \times 100 \times 40 + 1 \times 200 \times 30 = 10000$ （元）

经过比较，显然，集中到 5 号煤场费用最少。

答：集中到 5 号煤场费用最少。

例 3 北京和上海同时制成计算机若干台，北京可调运外地 10 台，上海可调运外地 4 台。现决定给重庆调运 8 台，给武汉调运 6 台，若每台运费如下表，问如何调运才使运费最省？

	重庆	武汉
北京	800	400
上海	500	300

解：北京调运到重庆的运费最高，因此，北京往重庆应尽量少调运。这样，把上海的 4 台全都调往重庆，再从北京调往重庆 4 台，调往武汉 6 台，运费就会最少，其数额为

$$500 \times 4 + 800 \times 4 + 400 \times 6 = 7600 \text{（元）}$$

答：上海调往重庆 4 台，北京调往武汉 6 台，调往重庆 4 台，这样运费最少。

30、列方程问题

【含义】把应用题中的未知数用字母 X 代替，根据等量关系列出含有未知数的等式——方程，通过解这个方程而得到应用题的答案，这个过程，就叫做列方程解应用题。

【数量关系】方程的等号两边数量相等。

【解题思路和方法】可以概括为“审、设、列、解、验、答”六字法。

(1) 审：认真审题，弄清应用题中的已知量和未知量各是什么，问题中的等量关系是什么。

(2) 设：把应用题中的未知数设为 X。

(3) 列：根据所设的未知数和题目中的已知条件，按照等量关系列出方程。

(4) 解：求出所列方程的解。

(5) 验：检验方程的解是否正确，是否符合题意。

(6) 答：回答题目所问，也就是写出答问的话。

同学们在列方程解应用题时，一般只写出四项内容，即设未知数、列方程、解方程、答语。设未知数时要在 x 后面写上单位名称，在方程中已知数和未知数都不带单位名称，求出的 x 值也不带单位名称，在答语中要写出单位名称。检验的过程不必写出，但必须检验。

例 1 甲乙两班共 90 人，甲班比乙班人数的 2 倍少 30 人，求两班各有多少人？

解：第一种方法：设乙班有 x 人，则甲班有 $(90 - x)$ 人。

找等量关系：甲班人数 = 乙班人数 $\times 2 - 30$ 人。

列方程： $90 - x = 2x - 30$

解方程得 $x = 40$ 从而知 $90 - x = 50$

第二种方法：设乙班有 x 人，则甲班有 $(2x - 30)$ 人。

列方程 $(2x - 30) + x = 90$

解方程得 $x = 40$ 从而得知 $2x - 30 = 50$

答：甲班有 50 人，乙班有 40 人。

例 2 鸡兔 35 只，共有 94 只脚，问有多少兔？多少鸡？

解：第一种方法：设兔为 x 只，则鸡为 $(35 - x)$ 只，兔的脚数为 $4x$ 个，鸡的脚数为 $2(35 - x)$ 个。根据等量关系“兔脚数 + 鸡脚数 = 94”

可列出方程 $4x + 2(35 - x) = 94$ 解方程得 $x = 12$ 则 $35 - x = 23$

第二种方法：可按“鸡兔同笼”问题来解答。假设全都是鸡，

则有兔数 = (实际脚数 - $2 \times$ 鸡兔总数) $\div (4 - 2)$

所以兔数 = $(94 - 2 \times 35) \div (4 - 2) = 12$ (只)

鸡数 = $35 - 12 = 23$ (只)

答：鸡是 23 只，兔是 12 只。

例 3 仓库里有化肥 940 袋，两辆汽车 4 次可以运完，已知甲汽车每次运 125 袋，乙汽车每次运多少袋？

解：第一种方法：求出甲乙两车一次共可运的袋数，再减去甲车一次运的袋数，即是所求。

$940 \div 4 - 125 = 110$ (袋)

第二种方法：从总量里减去甲汽车 4 次运的袋数，即为乙汽车共运的袋数，再除以 4，即是所求。

$(940 - 125 \times 4) \div 4 = 110$ (袋)

第三种方法：设乙汽车每次运 x 袋，可列出方程 $940 \div 4 - x =$
125

解方程得 $x = 110$

第四种方法：设乙汽车每次运 x 袋，依题意得

$$(125 + x) \times 4 = 940 \text{ 解方程得 } x = 110$$

答：乙汽车每次运 110 袋。